# Über die Konvergenz singulärer Integrale.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

## § 1. Einleitung.

H. LEBESGUE[1]) hat das Problem aufgeworfen, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzufinden, daß das singuläre Integral

$$\Phi_n(f;x)=\int_a^b f(t)\varphi_n(x;t)\,dt \qquad (n=1,2,\ldots)$$

jede Funktion $f(t)$ einer gegebenen Funktionenklasse in einem Punkte $x_0$ darstellt, d. h. daß die Relation

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f;x_0)=f(x_0)$$

besteht. D. K. FADDEEFF[2]) hat dieses Problem im Falle der Funktionenklasse $L$ und der Lebesgueschen Punkten gelöst. Seinen Satz haben S. G. KREJN und B. JA. LEVIN[3]) mit Anwendung der Theorie der Banachschen Räume bewiesen. B. I. KORENBLJUM, S. G. KREJN und B. JA. LEVIN[4]) haben das Lebesguesche Problem im Falle der Funktionenklasse $L^p$ $(p>1)$ und der Lebesgueschen Punkten $p$-ter Ordnung gelöst.

In dieser Arbeit werden wir mit Anwendung der Theorie der Banachschen Räume eine andere, von derjenigen der erwähnten Autoren verschiedene, notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der Funktionen von $L^p(p\geqq 1)$ in Lebesgueschen Punkten $p$-ter Ordnung geben. Mit Anwendung unserer Bedingung werden wir auch den Satz von D. K. FADDEEFF einfach beweisen können.

In folgendem werden wir uns auf den Fall $a=0$, $b=1$, $x_0=0$ beschränken; der allgemeine Fall kann darauf leicht zurückgeführt werden.[5])

[1]) H. LEBESGUE, Sur les intégrales singulières, *Annales de Toulouse*, 1 (1900), 25—117.

[2]) D. K. FADDEEFF, Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières, *Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik)*, 1 (43) (1936), 351—368.

[3]) С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О силной представимости функций сингулярными интегралами, Доклады Акад. Наук СССР, **60** (1948), 195—198.

[4]) Б. И. Кореньлюм, С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов, Доклады Акад. Наук СССР, **62** (1948), 17—20.

[5]) Ich möchte Prof. B. SZ.-NAGY meinen aufrichtigen Dank aussprechen für seine wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit.

## § 2. Hilfssatz.

Es sei in folgendem $p$ ein bestimmter Exponent, $p \geqq 1$, und es bezeichne $L_0^p$ die Klasse derjenigen Funktionen $f(t) \in L^p[0, 1]$, die im Punkte $x = 0$ verschwinden und für die der Punkt $x = 0$ ein Lebesguescher Punkt $p$-ter Ordnung ist, d. h. für die

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^h |f(t)|^p dt = o(h) \qquad (0 < h \to 0)$$

gelten. Mit der Norm

$$\|f\|_0^{(p)} = \sup_h \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \qquad (0 < h \leqq 1) \tag{1}$$

bildet $L_0^p$ einen Banachschen Raum.[6])

Es sei $\varphi(t)$ eine im Intervall $[0, 1]$ definierte meßbare Funktion und betrachten wir die Funktionaloperation

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt; \tag{2}$$

wir nehmen an, daß *$\Phi(f)$ in $L_0^p$ überall definiert und endlich ist,* d. h. daß

---

[6]) Siehe z. B. a. a. O. [4]). Die Vollständigkeit des Raumes $L_0^p$ folgt so: Es sei $f_n(t) \in L_0^p$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Cauchysche Funktionenfolge: $\|f_m - f_n\|_0^{(p)} \to 0$ $(m, n \to \infty)$. Dann ist auf Grund von (1)

$$\int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^p dt \to 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

und so existiert eine Teilfolge $f_{n_k}(t)$ mit fast überall existierendem $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(t) = f(t)$; offenbar ist $f(0) = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $0 < h \leqq 1$. Sind $n$ und $n_k$ genügend groß, so gilt nach der Annahme

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f_{n_k}(t) - f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqq \|f_{n_k} - f_n\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

Mit Anwendung des Fatouschen Lemmas erhalten wir daraus

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} < \varepsilon \qquad (n > N(\varepsilon)).$$

Also besteht $\|f - f_n\|_0^{(p)} \to 0$ $(n \to \infty)$. Man hat ferner

$$\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqq \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t) - f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \|f - f_n\|_0^{(p)} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f_n(t)|^p dt \right\}^{1/p},$$

woraus leicht zu sehen ist, daß $f(t)$ im Punkte $x = 0$ einen Lebesgueschen Punkt $p$-ter Ordnung hat. Damit wurde die Vollständigkeit des Raumes $L_0^p$ bewiesen.

dieses Integral für jede Funktion $f(t) \in L_0^p$ im Lebesgueschen Sinne existiert. Insbesondere existiert dann dieses Integral für jede solche Funktion $f(t)$, welche in einem Intervall $[0, \eta]$ verschwindet $(0 < \eta < 1)$ und im Intervall $[\eta, 1]$ zur Klasse $L^p[\eta, 1]$ gehört. Daraus folgt aber bekanntlich, daß $\varphi(t)$ in jedem solchen Intervall zur konjugierte Klasse $L^q[\eta, 1]$ gehört, $q = p/(p-1)$. Die Funktionaloperation

$$\Phi_\eta(f) = \int_\eta^1 f(t)\varphi(t)\,dt$$

ist für jedes feste $\eta$ in $L_0^p$ beschränkt:

$$|\Phi_\eta(f)| = \left|\int_\eta^1 \varphi(t)f(t)\,dt\right| \leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \left\{\int_0^1 |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \|f\|_0^{(p)}\,{}^{7)}.$$

Da für jede Funktion $f(t) \in L_0^p$

$$\lim_{\eta \to 0} \Phi_\eta(f) = \Phi(f)$$

gilt und $\Phi(f)$ endlich ist, ist $\Phi(f)$ nach dem Banach-Steinhausschen Satze eine beschränkte Funktionaloperation in $L_0^p$. Ihre Norm werden wir mit $\|\Phi\|_0^{(p)}$ bezeichnen:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} = \sup_f |\Phi(f)| \qquad (f \in L_0^p,\ \|f\|_0^{(p)} \leqq 1).$$

Hilfssatz. *Es gilt die Ungleichung*

$$4^{-\frac{1}{p}} A(p) \leqq \|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p),$$

*mit*

$$A(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q}.$$

Beweis. Ist $f(t) \in L_0^p$ und $\|f\|_0^{(p)} \leqq 1$, so gelten die Ungleichungen

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)\varphi(t)|\,dt \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q},$$

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt \leqq \frac{1}{2^m}\left\{2^m \int_0^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\} \leqq \frac{1}{2^m},$$

also gilt $\|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p)$.

---

7) Im Grenzfall $p = 1$, $q = \infty$ soll unter

$$\left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^q dt\right\}^{1/q}$$

der Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^r dt\right\}^{1/r} = \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\text{wes. ob. Gr.}}\ |h(t)|$$

verstanden werden.

Es sei $\varepsilon$ eine beliebige gegebene positive Zahl. Dann existiert für jedes $m$ im Intervall $(2^{-m-1}, 2^{-m})$ eine Funktion $f_m(t)$ mit den Eigenschaften:

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p dt = 1, \qquad \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} f_m(t)\varphi(t)dt \geqq \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt \right\}^{1/q} - \varepsilon.^{8)}$$

Es sei $f^*(t)$ diejenige, im Intervall (0, 1) definierte Funktion, die im Intervall $(2^{-m-1}, 2^{-m})$ gleich der Funktion $2^{-m/p} f_m(t)$ ist $(m = 0, 1, \ldots)$. Dann gilt offenbar die Ungleichung

$$\Phi(f^*) \geqq A(p) - \frac{1}{1-2^{-1/p}}\varepsilon. \tag{3}$$

Sei $0 < h \leqq 1$ und sei $k = k(h)$ diejenige natürliche Zahl, für welche $2^{-k-1} < h \leqq 2^{-k}$ gilt. Auf Grund der Definition von $f^*(t)$ gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f^*(t)|^p dt \leqq 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} |f^*(t)|^p dt = 2^{k+1} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p dt = 4,$$

woraus auch

$$\|f^*\|_0^{(p)} \leqq 4^{1/p}$$

folgt. Dieses Ergebnis, zusammen mit (3) ergibt:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} \geqq 4^{-1/p} A(p).$$

Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

## § 3. Sätze über die singulären Integrale.

Wir betrachten nun das singuläre Integral

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{4}$$

wir nehmen an, daß $\Phi_n(f)$ *für jedes* $n$ *in* $L_0^p$ *überall definiert und endlich ist.* Dann ist $\Phi_n(f)$ für jedes $n$ eine beschränkte lineare Funktionaloperation in $L_0^p$. Setzt man

$$A_n(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt \right\}^{1/q} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

so gilt nach dem Hilfssatz die Ungleichung

$$4^{-1/p} A_n(p) \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)} \leqq A_n(p) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Satz I. *Dafür, daß die Relation*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(f) = f(0) \tag{7}$$

[8]) Siehe z. B. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932), 61—65.

*für jede solche Funktion $f(t)$ aus der Klasse $L^p[0, 1]$ gilt, für die $x=0$ ein Lebesguescher Punkt p-ter Ordnung ist, ist notwendig und hinreichend, daß*

1) *die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\eta \varphi_n(t)\,dt = 1$$

*für jedes feste $\eta$ $(0<\eta\leqq 1)$ besteht,*

2) *die durch (5) definierten Größen $A_n(p)$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke $K=K(p)$ bleiben.*[9])

Notwendigkeit. Die Notwendigkeit von 1) folgt unmittelbar, wenn man diejenige Funktion $f(t)$ betrachtet, welche in $[0, \eta]$ gleich 1 und in $(\eta, 1]$ gleich 0 ist. Die Notwendigkeit von 2) kann folgendermaßen bewiesen werden. Nach (7) gilt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(f) = f(0) = 0$$

für jede Funktion $f(t)\in L_0^p$. Da die linearen Funktionaloperationen $\Phi_n(f)$ im Banachschen Raum $L_0^p$ einzeln beschränkt sind, so folgt auf Grund des Banach-Steinhausschen Satzes, daß sie eine gemeinsame Schranke besitzen und so bleiben die Größen $A^n(p)$ nach (6) unterhalb einer von $n$ unabhängigen Schranke.

Hinlänglichkeit. Es sei $f(t)\in L^p[0, 1]$ eine Funktion, für die der Punkt $x=0$ ein Lebesguescher Punkt $p$-ter Ordnung ist. Es folgt auf Grund von 1), daß

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 [f(t)-f(0)]\,\varphi_n(t)\,dt + f(0),$$

so daß es genügt, die Behauptung (7) im Falle $f(0)=0$, d. h. für Funktionen $f(t)$ der Klasse $L_0^p$ zu beweisen.

Es sei also $f(t)\in L_0^p$. Ist $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben, so hat man für genügend kleine $h$:

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{K}; \tag{8}$$

[9]) Bei B. I. Korenbljum, S. G. Krejn und B. Ja. Levin (a. a. O. [4])) steht statt 2) die Bedingung $\|\Phi_n\|_0^{(p)} < K$ $(n=1, 2, \ldots)$. Diese Autoren haben auch den Wert der Norm $\|\Phi_n\|_0^{(p)}$ $(p>1)$ bestimmt:

$$\|\Phi_n\|_0^{(p)} = \int_0^1 [-\Psi_n'(t)]^{1/q}\,dt,$$

wo $\Psi_n(t)$ die größte konvexe Funktion ist, für die

$$\Psi_n(t) \leqq F_n(t) = \int_t^1 |\varphi_n(y)|^q\,dy \qquad (0<t\leqq 1)$$

gilt.

man wähle die natürliche Zahl $m_0$ derart, daß die Ungleichung (8) für alle Werte $h$ gilt, für die $0 < h \leqq 2^{-m_0}$ ist. Wir schreiben $\Phi_n(f)$ in der folgenden Form an:

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt = \left(\int_0^{2^{-m_0}} + \int_{2^{-m_0}}^1\right) f(t)\varphi_n(t)\,dt = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}.$$

Es sei $f^*(t) = f(t)$ für $t \in [0, 2^{-m_0}]$ und $f^*(t) = 0$ sonst. Offenbar ist $\|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon/K$ und so gilt auf Grund der Ungleichung (6) und der Bedingung 2) für jedes $n$

$$(9) \qquad |I_1^{(n)}| = \left|\int_0^{2^{-m_0}} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 f^*(t)\varphi_n(t)\,dt\right| \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)} \|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

Mit Anwendung der Minkowskischen Ungleichung und auf Grund der Bedingung 2) ergibt sich

$$(10) \qquad \begin{gathered} \left\{\int_{2^{-m_0}}^1 |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \leqq \sum_{m=0}^{m_0-1} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \leqq \\ (2^{m_0-1})^{1/p} \sum_{m=0}^{m_0-1} 2^{-m/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \leqq (2^{m_0-1})^{1/p} A_n(p) \leqq (2^{m_0-1})^{1/p} K. \end{gathered}$$

Ferner folgt aus Bedingung 1) für jede Treppenfunktion $h(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2^{-m_0}}^1 h(t)\varphi_n(t)\,dt = 0,$$

woraus sich auf Grund von (10) auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2^{-m_0}}^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt = 0$$

ergibt. Also gilt für genügend große $n$: $|I_2^{(n)}| < \varepsilon$, und folglich, wegen (9), auch $|\Phi_n(f)| < 2\varepsilon$.

Also gilt $\Phi_n(f) \to 0$. Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

Von Satz I folgt der

Satz II (von D. K. FADDEEFF, a. a. O.[2]). *Dafür, daß die Relation* (7) *für jede solche Funktion $f(t)$ aus der Klasse $L[0,1]$ gilt, für die $x = 0$ ein Lebesguescher Punkt ist, ist notwendig und hinrechend, daß die Bedingung* 1) *des Satzes I erfüllt wird und für jedes n gilt:*

$$\int_0^1 \psi_n(t)\,dt < M \quad (< \infty),$$

*wobei*

$$\psi_n(t) = \underset{t \leqq y \leqq 1}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(y)| \qquad (0 < t \leqq 1)$$

*bedeutet.*

Beweis. Wir brauchen nur die Ungleichungen

$$\frac{1}{2} A_n(1) \leqq \int_0^1 \psi_n(t) dt \leqq A_n(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

zu beweisen, da daraus mit Anwendung des Satzes I der obige Satz folgt. Nach der Definition von $\psi_n(t)$ ergibt sich einerseits die Abschätzung

$$\int_0^1 \psi_n(t) dt \geqq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t) dt \geqq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m-1} \underset{2^{-m} \leqq t \leqq 2^{-m+1}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| = \frac{1}{2} A_n(1).$$

Für jedes $m$ gilt andererseits

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t) dt \leqq 2^{-m-1} \sum_{\mu=0}^{m} \underset{2^{-\mu-1} \leqq t \leqq 2^{-\mu}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)|$$

und so ist

$$\int_0^1 \psi_n(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t) dt \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} \underset{2^{-\mu-1} \leqq t \leqq 2^{-\mu}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| \left\{ \sum_{m=\mu}^{\infty} 2^{-m-1} \right\} = A_n(1).$$

Auf Grund des Satzes I können wir beweisen auch den

Satz III. *Dafür, daß die Relation* (7) *für jede solche Funktion* $f(t)$ *aus der Klasse* $L[0, 1]$ *gilt, für die* $x = 0$ *ein Lebesguescher Punkt ist, ist notwendig und hinreichend, daß*

a) *die Relation* (7) *für die Funktionen aller Klassen* $L_0^{(p)}$ *mit* $p > 1$ *gilt,*

b) *für* $p > 1$ *die Normen* $\| \Phi_n \|_0^{(p)}$ *unterhalb einer von* $p$ *und* $n$ *unabhängigen Schranke bleiben.*

Notwendigkeit. Ist $p \gtrless 1$, so gilt $L_0^p \subseteq L_0^1$ und $\| \Phi_n \|_0^{(p)} \leqq \| \Phi_n \|_0^{(1)}$, woraus die Notwendigkeit der obigen Bedingungen klar ist.

Hinlänglichkeit. Wegen a) wird die Bedingung 2) des Satzes I auf Grund des Satzes I erfüllt. Für jede natürliche Zahl $k$ besteht die folgende Abschätzung:

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \underset{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| \leqq$$

$$\sum_{m=0}^{k} \left| 2^{-m} \underset{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| - 2^{-m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt \right\}^{1/q} \right| + A_n(p).$$

Für $p \to 1$, d. h. für $q \to \infty$ strebt jedes Glied der Summe $\Sigma$ an der rechten Seite gegen 0, und folglich gilt für genügend kleines $p-1$:

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \underset{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}}{\text{wes. ob. Gr.}} |\varphi_n(t)| \leqq 1 + A_n(p).$$

Da $k$ beliebig ist, so bleiben die Größen $A_n(1)$ auf Grund von b) und (6) unterhalb einer von $n$ unabhängigen Schranke, und so ergibt sich mit Anwendung des Satzes I die Hinlänglichkeit der Bedingungen a) und b).

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

*(Eingegangen am 1. Mai 1954.)*